Содержание

1. Введение.

1.1. Некоторые сведения из теории множеств.

Определение: *Множество* – аксиоматическое понятие, которое может быть интерпретировано как некоторый набор элементов; *пустое множество* – множество, не содержащее элементов. $x \in A$ обозначает, что элемент x принадлежит множеству A.

Определение: Множество B называется *подмножеством* А($A \subseteq B$), если $\forall\, x \in B\ x \in A$; очевидно, что $\forall\ A\ \varnothing \subseteq A$. Множества А и В *равны*, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Операции над множествами:

1) *Объединение* – $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \bigvee x \in B\}$ (элемент x принадлежит хотя бы одному из множеств); $\bigcup\limits_{\alpha \in A} A_\alpha$ - множество, состоящее из элементов всех $A_\alpha(\alpha \in A)$.

2) *Пересечение* – $A \bigcap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$; $\bigcap\limits_{\alpha \in A} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha\ \forall\ \alpha \in A\}$.

3) *Разность* – $A \backslash B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$.

4) *Дополнение* – $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

Замечание: В математическом анлизе черта над буквой, обозначающей множество, обычно символизирует замыкание A (то есть объединение множества со своей границей); тем не менее, в теории вероятностей этим знаком обозначают дополнение A.

Теорема 1 (законы Моргана): $\overline{\bigcup\limits_{\alpha \in A} A_\alpha} = \bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha}$; $\overline{\bigcap\limits_{\alpha \in A} A_\alpha} = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha}$

$\triangle\ \forall\, x \in \overline{\bigcup\limits_{\alpha \in A} A_\alpha}\ \ x \notin A_\alpha\ \forall\, \alpha \in A \Rightarrow \forall\, \alpha \in A\ x \notin \overline{A_\alpha} \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha} \Rightarrow \overline{\bigcup\limits_{\alpha \in A} A_\alpha} \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha}$. $\forall\, x \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha}\ \ x \in \overline{A}_\alpha\ \forall\ \alpha \in A \Rightarrow \forall\ \alpha \in A\ x \notin A_\alpha \Rightarrow x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in A} A_\alpha \Rightarrow x \in \overline{\bigcup\limits_{\alpha \in A} A_\alpha} \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{\alpha \in A} A_\alpha}$. Таким образом, $\overline{\bigcup\limits_{\alpha \in A} A_\alpha} = \bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha}$. Второе равенство доказывается аналогично. ■

Определение: *отображением* f множества A на B называется сопоставление каждому элементу $a \in A$ одного элемента $b \in B$, называемого *образом* $a:\ f(a) = b$. Всякий элемент $a \in A:\ f(a) = b$ называется *прообразом* b в A. Если $C \subseteq A$, то $f(C) = \{f(a),\ a \in C\}$ называется *образом* C в B; если $D \subseteq B$, то $f^{-1}(D) = \{a \in A:\ f(a) \in D\}$ называется *полным прообразом* D в A.

Определение: Множества A и B *эквивалентны*(равномощны), если взаимно однозначное отображение A на B (то есть каждому $a \in A$ соответствует единственное $b \in B$: $b = f(a)$ и $\forall\ b\ \exists!\ a = f^{-1}(b)$). Таким образом, все множества могут разбиты на *классы эквивалентности* (то есть классы одинаковой мощности).

Определение: Множество A называется *бесконечным*, если оно эквивалентно какому-либо своему нетривиальному (то есть не совпадающему с A) подмножеству и *конечным* в противном случае. *Мощность* ($\overline{\overline{A}}$) является числом, характеризующим тот или иной класс эквивалентности; для конечных множеств мощность совпадает с числом элементов. Для бесконечных множеств мощность характеризует тип множества; например, все множества, эквивалентные $\mathbb{N}$, называют *счётными*, а множества, эквивалентные [0,1] - *континуальными*. Можно также показать (см. мат. анализ, 1.1.2), что конечное или счётное объединение счётных множеств счётно, а $\mathbb{R}$ континуально.

Определение: Мощности множеств A и B совпадают($\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$), если А и В эквивалентны и $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, если A эквивалентно какому-либо нетривиальному подмножеству B.

Определение: $2^A = \{C \mid C \subseteq A\}$ называется *булеаном* (множеством всех подмножеств) A. Если A конечно ($\overline{\overline{A}} = n \in \mathbb{N}$), то $\overline{\overline{2^A}} = 2^n$ (число подмножеств A определяется как число двоичных векторов длины n, в которых 1 соответствует наличию элемента в подмножестве - см. 1.2).

Определение: Ω – произвольное непустое множество; $\mathfrak{F}$ – набор подмножеств Ω – называется *алгеброй*, если $\forall\ A,\ B \in \mathfrak{F}\ \ \overline{A} \in \mathfrak{F},\ A \bigcup B \in \mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ называется *σ-алгеброй*, если $\forall\ A_1, \ldots A_n, \ldots \in \mathfrak{F}\ \ \overline{A}_i \in \mathfrak{F}\ \forall\ i \in \mathbb{N},\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}$.

Замечание: из определений следует ряд свойств алгебр и σ-алгебр; если $\mathfrak{F}$ - алгебра, то $\forall\ A,\ B \in \mathfrak{F}\ A \bigcap B = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}} \in \mathfrak{F},\ \Omega = A \bigcup \overline{A} \in \mathfrak{F},\ \varnothing = A \bigcap \overline{A} \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ - σ-алгебра, то, по теореме 1, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\varnothing = A_1 \bigcap \overline{A_1} \bigcap A_1 \bigcap \ldots \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \bigcup B = A \bigcup B \bigcup \varnothing \bigcup \ldots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \Omega = A \bigcup \overline{A} \in \mathfrak{F}$.

1.2. Некоторые сведения из комбинаторики.

Комбинаторика - раздел математики, занимающийся подсчётом числа комбинаций элементов конечного множества, составленных при определённых условиях.

Определение *Генеральной совокупностью* объёма n называется произвольное конечное множество $E = \{a_1, \ldots a_n\}$; выборкой их генеральной совокупности объёма r называется произвольное непустое подмножество E: $A = \{a_{i_1}, \ldots a_{i_r}\}$.

Теорема 1 (Правило умножения): если есть N_1 способов выполнить действие 1, а затем N_2 способов выполнить действие 2, то есть $N_1 N_2$ способов выполнить 1 и 2 последовательно.

Теорема 2 (Правило сложения): если есть N_1 способов выполнить действие 1 и N_2 способов выполнить действие 2, то есть $N_1 + N_2$ способов выполнить одно из действий - 1 или 2.

$\triangle$ Данные утверждения вполне очевидны, поэтому их доказательства не приводятся.

Определение выборка называется *упорядоченной*, если имеет значение порядок её элементов, и *неупорядоченной* в обратном случае. Выборка проводится *без возвращения*, если каждый элемент генеральной совокупности входит в неё не более одного раза, и *с возвращением* в обратном случае.

Определение *Двоичный вектор* длины n - вектор длины n, компонентами которого являются нули и единицы.

Подсчёт числа выборок (N) объёма r из генеральной совокупности объёма n:

Выборки	Упорядоченные	Неупорядоченные
С возвращением	n^r	C_{n+r-1}^r
Без возвращения	A_n^r	C_n^r

1) *Упорядоченные, с возвращением*: в выборке на каждом месте может находиться один из n элементов, поэтому, по правила умножения, $N = n \cdot \ldots \cdot n = n^r$. В частности, имеется 2^n двоичных векторов длины n.

2) *Упорядоченные, без возвращения*: на первом месте выборки может находиться один из n элементов, на втором – один из $N-1$ элементов, и так далее. $N = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{r!} = A_n^r$ – *число размещений.*

3) *Неупорядоченные, без возвращения*: размещения из n по r могут реализовываться (в зависимости от порядка) $r!$ способами (на первом месте - любой из r элементов, на втором – любой из $r-1$ элементов и так далее), поэтому $N = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = C_n^r$ – *число сочетаний.*

4) *Неупорядоченные, с возвращением*: сопоставим каждой выборке двоичный вектор, в который входят единицы по числу раз, которое элемент данного типа входит в выборку, и нули, разделяющие элементы (например, если $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $A = \{a_1, a_2, a_1, a_1\}$, то вектор имеет вид (111010)). Таким образом получим двоичный вектор длины $n+r-1$, содержащий r единиц; всего существует $N = C_{n+r-1}^r$ таких векторов.

Подсчёт числа (N) размещений n частиц по r ячейкам:

Частицы	Различимые	Неразличимые
С запретом	$\frac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_r!}$	C_{n-1}^{r-1}
Без запрета	r^n	C_{n+r-1}^{r-1}

1) *Различимые частицы, без запрета*: в каждое место каждой ячейки может попасть любая из r частиц, поэтому $N = r^n$.

2) *Различимые частицы, с запретом* (в i-ую ячейку попадает n_i элементов, $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = n$): в первую ячейку могут попасть n_1 из n элементов, во вторую n_2 из $n-n_1$ элементов, и так далее. Поэтому $N = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{r-1}}^{n_r} = \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-\ldots-n_{r-1})!}{0!n_r!} = \frac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_r!}$.

3) *Неразличимые частицы, без запрета*: сопоставим каждому размещещнию двоичный вектор, содержащий единицы по числу частиц в той или иной ячейке и нули как "разделители" между ячейками. Так получится двоичный вектор длины $n + r - 1$, содержащий n единиц, то есть $N = C_{n+r-1}^{n} = C_{n+r-1}^{r-1}$.

4) *Неразличимые частицы, с запретом* (ни одна ячейка не остаётся пустой): проводим построения, аналогичные предыдущему случаю, уменьшая число единиц на r (в каждой ячейке обязательно есть хотя бы одна частица); поэтому $N = C_{n-1}^{n-r} = C_{n-1}^{r-1}$.

2. Аксиоматика теории вероятностей и её простейшие применения.

2.1. Аксиомы теории вероятностей.

Определение *Случайное событие* – событие, которое может произойти с различными, взаимно исключающими исходами; в теории вероятностей рассматриваются только те случайные события, для которых возможна *повторяемость*, а также наблюдается *статистическая устойчивость частот* (*частота* – отношение числа выпадений того или иного исхода к общему числу испытаний). Подобные события называют *стохастическими*.

Определение *Пространство элементарных исходов* Ω является аксиоматическим понятием и представляет собой непустое множество, элементы которого символизируют тот или иной исход рассматриваемого процесса. Элементы Ω называются *элементарными событиями*, а подмножества Ω – *событиями*.

Определение A, B – события; *суммой событий* $(A + B)$ называется событие, состоящее в том, что одно из событий – A или B – произошло. *Произведением событий* (AB) называется событие, состоящее в том, что произошли оба события – и A и B. *Разностью событий* $(A \backslash B)$ называется событие, состоящее в том, что A произошло, а B – нет. Событием, *обратным* к A $(\overline{A})$ называется событие, состоящее в том, что A не произошло. Очевидно, $A + B = A \bigcup B,\ AB = A \bigcap B$.

Определение $\mathfrak{F}$ – σ-алгебра событий. P:$\mathfrak{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется вероятностной мерой (или просто *вероятностью*), если она удовлетворяет следующим условиям (*аксиомы вероятности*): $\forall\ A_i \in \mathfrak{F}\ (i \in \mathbb{N})$

1) $P(A_i) \geq 0$,

2) $P(\Omega) = 1$,

3) Если $A_i A_j = \varnothing\ \forall\ i, j \in \mathbb{N}\ (i \neq j)$, то $P\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_i)$ (здесь $\sum$ понимается как числовой ряд, схоядщийся абсолютно).

Определение *Вероятностным пространством* называется набор $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, описывающий данное случайное событие.

Замечание: Третья аксиома вероятности (аксиома σ-аддитивности) может быть заменена на две – *аксиомы конечной аддитивности* и *непрерывности*: $\forall\ A, B \in \mathfrak{F}$: $AB = \varnothing\ P(A + B) = P(A) + P(B)$; $\forall\ A_1, \dots A_n, \dots \in \mathfrak{F}$: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$, $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing\ \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = 0$.

$\triangle$ $\Rightarrow$. Пусть $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$, $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing$. $A_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} A_k \overline{A}_{k+1} + \prod\limits_{k=n}^{\infty} A_k$; тогда, по аксиоме σ-аддитивности, $P(A_n) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} P\left(A_k \overline{A}_{k+1}\right) + P\left(\prod\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} P\left(A_k \overline{A}_{k+1}\right) \to 0,\ n \to \infty$ (как остаток схоядщегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P\left(A_k \overline{A}_{k+1}\right) = P(A_1)$).

$\Leftarrow$. Пусть $A_1, \dots A_n, \dots \in \mathfrak{F}; A_i A_j = \varnothing\ \forall\ i, j \in \mathbb{N}\ (i \neq j); A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n,\ B_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow B_{n+1} \subseteq B_n$. Если наступило B_n, то наступило только одно из $A_k (k \geq n) - A_m$, то есть $\forall\ l > m\ A_l$ не наступило $\Rightarrow\ P\left(\prod\limits_{k=m+1}^{\infty}\right) = 0 \Rightarrow P(B_n) \to 0, n \to \infty$; но $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k + B_{n+1}$, поэтому, в пределе при $n \to \infty$, $P(A) = P\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$. $\blacksquare$

Теорема 1 (свойства вероятности): $\forall\ A, B \in \mathfrak{F}$

1) $B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A),\ P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$;

2) $0 \le P(A) \le 1$;

3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

4) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

$\triangle$ 1) $A = A\overline{B} + B,\ (A\overline{B})B = \varnothing \Rightarrow P(A) = P(A\overline{B}) + P(B) \Rightarrow P(A) \ge P(B)$.

2) $\forall\ A \in \mathfrak{F}\ A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \le P(\Omega) = 1$.

3) $A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$.

4) $A + B = \overline{A}B + \overline{B}A + AB \Rightarrow P(A+B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$. $\blacksquare$

Замечание: данные аксиомы были введены А. Н. Колмогоровым (поэтому их часто называют аксиомами Колмогорова); система этих аксиом непротиворечива (то есть существуют функции, ей удовлетворяющие) и неполна (то есть не задаёт вероятностную меру однозначно).

2.2. Вероятность в дискретных пространствах элементарных исходов.

Определение: пространство элементарных исходов *дискретно*, если оно конечно или счётно; в этом случае $\mathfrak{F}$ выбирается как 2^{Ω}.

Определение: Ω – дискретное пространство элементарных исходов; тогда $P\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется вероятностной мерой (*вероятностью*), если $\forall\ \omega \in \Omega\ P(\omega) \ge 0,\ \sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$. В этом случае $\forall\ A \in \mathfrak{F}\quad P(A) = \sum\limits_{\omega\in A} P(\omega)$ (все $\sum$ понимаются как конечные суммы или сходящиеся числовые ряды).

Теорема 1 (теорема сложения): Ω – дискретное пространство элементарных исходов; $\forall\ A, B \in \mathfrak{F}$: $AB = \varnothing\ P(A+B) = P(A) + P(B)$.

$\triangle$ $P(A+B) = \sum\limits_{\omega\in A+B} P(\omega) = \sum\limits_{\omega\in A} P(\omega) + \sum\limits_{\omega\in B} P(\omega) = P(A) + P(B)$. $\blacksquare$

Следствие: $\forall\ A, B \in \mathfrak{F}\ \ P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB);\ P(A+B) \le P(A) + P(B)$.

$\triangle$ $A + B = \overline{A}B + \overline{B}A + AB \Rightarrow P(A+B) = \sum\limits_{\omega\in B,\ \omega\notin A} P(\omega) + \sum\limits_{\omega\in A,\ \omega\notin B} P(\omega) + \sum\limits_{\omega\in A,\ \omega\in B} P(\omega) = \sum\limits_{\omega\in A} P(\omega) + \sum\limits_{\omega\in B} P(\omega) - \sum\limits_{\omega\in A,\ \omega\in B} P(\omega) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Ряды сходятся абсолютно, поэтому перестановки не изменяют их суммы. $\blacksquare$

Теорема 2 (обобщённая теорема сложения): Ω – дискретное пространство элементарных исходов;$\forall\ A_1, \ldots A_n \in \mathfrak{F}$: $A_iA_j = \varnothing\ \forall\ i,j = \overline{1,n}\ (i \ne j)$. $P\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Следствие: $\forall\ A_1, \ldots A_n \in \mathfrak{F}\quad P\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum\limits_{1\le i_1<i_2\le n} P\left(A_{i_1}A_{i_2}\right) + \sum\limits_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} P\left(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}\right) - \ldots + (-1)^n P(A_1 \ldots A_n);\ P\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$.

$\triangle$ Доказательство проводится по индукции с использованием теоремы 1.

Теорема 3 (σ-аддитивности): Ω – дискретное пространство элементарных исходов; $\forall\ A_1, \ldots A_n, \ldots \in \mathfrak{F}$: $A_iA_j = \varnothing\ \forall\ i,j = \overline{1,n}\ (i \ne j)\ P\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

$\triangle$ $P\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{\omega\in A_i} P(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)\ (i \in \mathbb{N})$. Данный ряд сходится, так как любая его частичная сумма ограничена сверху $\sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$. $\blacksquare$

2.3. Примеры задания вероятности.

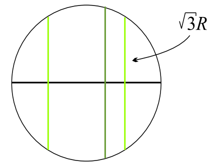
Определение: Ω – конечное множество мощности n; тогда $\forall\ A \subseteq \Omega\ P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{n}$ – *классическое определение вероятности.*

Опердление: Ω – измеримая по Жордану область $\mathbb{R}^n$; для любого A – измеримого по Жордану подмножества Ω – $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$: *геометрическая вероятность.*

Замечание: очевидно, что выбор вероятности с использованием этих схем имеет смысл только в том случае, когда все элементарные исходы равновероятны.

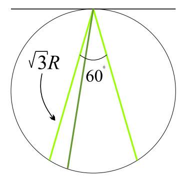
Пример (парадокс Бертрана): требуется определить, с какой вероятностью хорда, проведённая произвольным образом в окружности единичного радиуса, превысит по длине сторону вписанного в эту окружность правильного треугольника (то есть превысит $\sqrt{3}$).

В данном случае есть три способа подсчёта геометрической вероятности:



1) Проведём диаметр, перпендикулярный к хорде, и подсчитаем вероятность, как отношение длины "центрального участка"(того, через который проходят хорды длиннее $\sqrt{3}$) к целому диаметру. $P = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

2) Оценим угол между хордой и касательной к окружности – хорда больше $\sqrt{3}$, если угол превышает соответствующий угол для правильного треугольника (то есть 60^0). Таким образом, искомый исход реализуется в случае попадания величины угла в интервал от 60^0 до 120^0 : $P = \frac{120-60}{180-0} = \frac{1}{3}$.



3) Хорда превысит по длине сторону правильного треугольника, если она пересечёт окружность, вписанную в этот треугольник, то есть вероятность рассчитывается как отношение площадей вписанной и описанной окружностей: $P = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi 1^2} = \frac{1}{4}$.

Таким образом, выбор геометрической вероятности неоднозначен.

2.4. Условная вероятность.

Определение: $A, B \in \mathfrak{F}$, $P(B) > 0$; тогда *условной вероятностью* события A при условии B называется $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Теорема 1 (теорема умножения): $A, B \in \mathfrak{F}$; $P(A)$, $P(B) > 0$; тогда $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A)P(A)$.

$\triangle$ Непосредственное следует из определения условной вероятности.

Следствие (Обобщённая теорема умножения): $A_1, \ldots A_n \in \mathfrak{F}$; $\forall\, k = \overline{2, n-1}$ $P(A_1 \ldots A_k) > 0$; тогда $P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})$.

$\triangle$ Доказательство проводится по индукции, исходя из теоремы.

Определение: $A, B \in \mathfrak{F}$; события A и B *независимы*, если $P(AB) = P(A)P(B)$. Очевидно, что в случае $P(A), P(B) > 0$ это определение эквивалентно $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$.

Определение: $A_1, \ldots A_n \in \mathfrak{F}$ $(n \geq 3)$; события $A_1, \ldots A_n$ *независимы в совокупности*, если $\forall\, k \in \mathbb{N}, i_1, \ldots i_k :\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ $P\left(A_{i_1} \ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \ldots P\left(A_{i_k}\right)$.

Замечание: данное определение независимости событий часто оказывается шире реальной независимости событий, поэтому иногда вопрос о независимости событий решают не математически, а по результатам эксперимента.

Пример (Бернштейна): попарная независимость событий не обязательно означает их независимость в совокупности; рассмотрим правильный тетраэдр, три грани которого окрашены, соответственно, в красный, зелёный и синий цвета, а четвёртая – во все три цвета одновременно (например, грань разбита на три части, окрашенные в разные цвета). Событие 1 заключается в выпадении грани, на которой имеется красный цвет, событие 2 – зелёный цвет, событие 3 – синий цвет. Тогда, согласно классическому определению вероятности, $P_1 = P_2 = P_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P_{12} = P_{13} = P_{23} = \frac{1}{4} = P_1P_2$, однако $P_{123} = \frac{1}{4} \neq P_1P_2P_3$.

Определение: $H_1, \ldots H_n \in \Omega$ образуют *полную группу событий*, если $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$; $H_i \neq \varnothing$ $H_iH_j = \varnothing$ $\forall\, i, j = \overline{1, n} :\ i \neq j$.

Теорема 2 (формула полной вероятности): $H_1, \dots H_n$ – полная группа событий; тогда $\forall\ A \in \mathfrak{F}\ P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$.

$\triangle$ $A = A\Omega = A(H_1 \bigcup \dots \bigcup H_n) = AH_1 \bigcup \dots \bigcup AH_n \Rightarrow (AH_i \bigcap AH_j \neq \varnothing\ \forall\ i, j = \overline{1, n} :\ i \neq j)\ P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(AH_i) = (\text{теорема 1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$. ■

Замечание: теорема верна также для случаев $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_n$, а также в случае $A \subseteq (H_1 \bigcup \dots \bigcup H_n) \subset \Omega$.

Теорема 3 (формула Байеса): $H_1, \dots H_n$ – полная группа событий; тогда $\forall\ A \in \mathfrak{F}, \forall\ k \in \mathbb{N}\ P(H_k|A) = \dfrac{P(AH_k)}{P(A)} = \dfrac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$.

$\triangle$ Формула непосредственно следует из теорем 1 и 2.

2.5. Схема Бернулли.

Определение: *схемой Бернулли* называется последовательность одинаковых независимых испытаний, имеющих 2 возможных несовместынх исхода, достигаемых с вероятностями p и $q = 1 - p$.

Определение: *полиномиальной схемой* называется последовательность одинаковых независимых испытаний, имеющих m несовместных исходов, достигаемых с вероятностями $p_1, \dots p_m$. Очевидно, что схема Бернулли является биномиальной – частным случаем полиномиальной схемы. Пространством элементарных исходов для полиномиальной схемы является множество всех векторов длины n (число испытаний), компонентами которых являются натуральные числа от 1 до m.

Теорема 1: если μ_n - число успехов в схеме Бернулли, состоящей из n испытаний, то $P_n(m) = P\{\mu_n = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$.

$\triangle$ Число успехов определяется числом единиц в двоичном векторе длины n, описывающем данный результат; вероятность наличия m единиц равна вероятности появления m единиц и $n - m$ нулей, умноженной на число сочетаний из n по m. ■

Следствие: если μ_i – число выпадений i-го исхода в полиномиальной схеме, состоящей из n испытаний, то $P\{\mu_1 = n_1, \dots \mu_m = n_m\} = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$.

$\triangle$ Вероятность равна числу соответствующих сочетаний (n_1 единиц, n_2 двоек, … n_m чисел m – см. 1.2), умноженному на вероятность выпадения n_i раз i-го исхода.

Теорема 2 (Пуассона): p_n – вероятность успеха в схеме Бернулли, состоящей из n испытаний; $\lambda_n = np_n,\ p_n \to 0,\ \lambda_n \to \lambda > 0,\ n \to \infty$; тогда $\forall\ m = \overline{0, n}\ P_n(m) \to \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},\ n \to \infty$.

$\triangle$ $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = C_n^m \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^m} = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \exp\left(n\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)\right) =$$

$$\frac{\lambda^m}{m!} \cdot \lim_{n\to\infty} \exp(-\lambda_n) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$ ■

Замечание: эта теорема может быть использована для приближённого вычисления числа успехов в схеме Бернулли; при больших n и малых p $P_n(m) = \dfrac{(np)^m e^{-np}}{m!}$, причём $\left| C_n^m p^m q^{n-m} - \dfrac{(np)^m e^{-np}}{m!} \right| \leq np^2$.

Теорема 3 (локальная предельная теорема Муавра-Лапласа – без доказательства): p_n – вероятность успеха в схеме Бернулли, состоящей из n испытаний; $p_n = p = const$; $x_{nm} = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ равномерно ограничены по n при $m \in B$; тогда

$$P_n(m) \underset{n\to\infty}{\overset{m\in B}{\rightrightarrows}} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \exp\left(-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right).$$

Замечание: при условиях теоремы может быть также указана асимптотика сходимости

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \exp\left(-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Теорема 4 (интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа – без доказательства):

$$\forall\ A, B \in \mathbb{R}\ P\left\{a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \underset{n\to\infty}{\overset{a,b}{\rightrightarrows}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Следствие:

$$P\left\{m_1 \le \mu_n \le m_2\right\} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_{m_1}}^{x_{m_2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi\left(x_{m_2}\right) - \Phi\left(x_{m_1}\right),$$

где $x_{m_i} = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}$ $(i = 1, 2)$; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ – табличная величина.

Замечание: для приближённых вычислений при $np \le 20$ используют теорему Пуассона и интегральную предельную теорему Муавра-Лапласа при больших значениях np.

3. Случайные величины.

3.1. Одномерные случайные величины и их распределения.

Определение: *борелевской алгеброй* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ числовых множеств называется набор множеств, полученных применением конечное или счётное число раз теоретико-множественных операций к набору $\{(-\infty, x\}_{x\in\mathbb{R}}$; элементы такой алгебры называются *борелевскими множествами*. Очевидно, что $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ является σ-алгеброй. Аналогично определяется $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание: борелевская алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ может быть порождена различными числовыми множествами – $(-\infty, x]$, $[x_1, x_2)$, (x_1, x_2), $(x_1, x_2]$, $(x, +\infty)$, $[x, +\infty)$.

Определение: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – *случайная величина*, если

1) $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \xi^{-1}\left((-\infty, x)\right) \in \mathfrak{F}$; *функцией распределения* случайной величины называется $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\left(\xi^{-1}(-\infty, x)\right)$.

2) $\forall\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\ \xi^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$; тогда $P\{\xi \in B\} = P\left(\xi^{-1}(B)\right)$ – *распределением вероятностей.*

Теорема 1 (без доказательства): функция $F_\xi(x)$ позволяет определить все значения $P\{\xi \in B\}$, то есть сформулированные определения случайной величины эквивалентны.

Теорема 2 (свойства функции распределения): ξ – случайная величина; $F(x) = F_\xi(x)$, тогда

1) $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} :\ x_1 < x_2\ F(x_1) \le F(x_2)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

3) $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}\ \lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$;

4) $F(x)$ имеет конечное или счётное число точек разрыва.

$\triangle$ 1) $(-\infty, x_1) \subset (-\infty, x_2)\quad \xi^{-1}\left((-\infty, x_1)\right) \subset \xi^{-1}\left((-\infty, x_2)\right) \Rightarrow P\{\xi < x_1\} \le P\{\xi < x_2\} \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.

2) $(-\infty, -1) \supset (-\infty, -2) \supset \ldots \supset (-\infty, -n) \supset \ldots,\ \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, -n) = \varnothing \Rightarrow$ $\xi^{-1}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, -n)\right) = \varnothing \Rightarrow$ (аксиома непрерывности) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = P(\varnothing) = 0$ (на самом деле, показано существование частичного предела при $x \to -\infty$, однако, поскольку F монотонна, то, по теореме математического анализа (см. 1.3.2), существует и искомый предел).

3) $(-\infty, x_0-1) \supset (-\infty, x_0-\frac{1}{2}) \supset \ldots \supset (-\infty, x_0-\frac{1}{n}) \supset \ldots,\ \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, x_0-\frac{1}{n}) = (-\infty, x_0)$, поэтому, аналогично п. 2), $F(x_0) = P\{\xi < x_0\} = P\left(\xi^{-1}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, x_0 - \frac{1}{n})\right)\right) = \lim\limits_{x\to x_0-0} F(x)$ (здесь вновь показано лишь существование частичного предела, из который определяет и существование искомого одностороннего).

4) F монотонна, поэтому $\forall\ x \in \mathbb{R}\ 0 \le F(x) \le 1$, значит, функция F может иметь только один скачок, величина которого превышает $\frac{1}{2}$, не более двух скачок, величина которых больше $\frac{1}{3}$, но не превосходит $\frac{1}{2}$; аналогично F имеет не более n скачков, величина которых лежит в пределах $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Таким образом, всего F имеет конечное или счётное объединение конечного числа скачков, то есть конечное или счётное число скачков. ■

Замечание: некоторые авторы задают функцию распределения как $F_\xi(x) = P\{\xi \le x\}$; в этом случае свойства 1, 2 и 4 сохраняются, а свойство 3 заменяется на непрерывность справа.

Теорема 3 (без доказательства): любая вещественная функция $F(x)$, удовлетворяющая свойствам 1, 2 и 4 теоремы 2, является функцией распределения некоторой случайной величины (в этом случае $P\{\xi \in [x_1, x_2)\} = F(x_2) - F(x_1)$).

Замечание: таким образом, каждой случайной величине соответствует функция распределения, а каждой функции, удовлетворяющей свойствам 1, 2 и 4 теоремы 2, – случайная величина (возможно, не одна: например, если $\xi = \begin{cases} 1, \ p = \frac{1}{2} \\ -1, \ p = \frac{1}{2} \end{cases}$, то $F_\xi(x) = F_{-\xi}(x)$).

Замечание: функция распределения может служить вероятностной мерой в вероятностном пространстве $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), F_\xi)$, называемом *индуцированным вероятностным пространством.*

Определение: случайная величина ξ называется *распределённой дискретно*, если она принимает конечное или счётное число значений $\{x_1, \dots x_n, \dots\}$; тогда $P\{\xi = x_k\} = p_k > 0, \ \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} p_k = 1$. В этом случае часто записывают: $\begin{pmatrix} p_1 \ p_2 \dots p_n \dots \\ x_1 \ x_2 \dots x_n \dots \end{pmatrix}$. Очевидно, что в случае дискретного распределения $F_\xi(x)$ имеет разрывы.

Примеры дискретных распределений:

1) *Вырожденное*: $\{\xi = c\} = 1$.

2) *Дискретное равномерное*: $\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ \frac{1}{n} \dots \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

3) *Бернуллиевское*: $\begin{cases} 0, \ p \\ 1, \ q = 1 - p \end{cases}$.

4) *Биномиальное* с параметрами (n, p): $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ (вероятность выпадения k успехов в схеме Бернулли, состоящей из n испытаний).

5) *Гипергеометрическое*: $p_k = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ (вероятность извлечь m белых шаров в выборке без возвращения n шаров из урны, содержащей N шаров, среди которых M белых).

6) *Геометрическое*: $p_k = pq^k$ (вероятность появления первого успеха в схеме Бернулли после k неудач).

7) *Распределение Паскаля*: $p_k = C_{n+k-1}^k p^n q^k$ (вероятность появления k неудач в схеме Бернулли до n-го успеха).

8) *Распределение Пуассона*: $p_k = \dfrac{\lambda^k e^- \lambda}{k!}, \ \lambda > 0$ (приближение биномиальной схемы при $n \to \infty$ в случае $np_n \to \lambda, \ n \to \infty$ – см. теорему Пуассона).

Определение: случайная величина ξ распределена *абсолютно непрерывно*, если $\exists \ p_\xi(x) \geq 0 : \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1, \forall \ x \in \mathbb{R} \ F_\xi(x) = -\int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt$. В этом случае $p_\xi(x)$ называется *плотностью распределения случайной величины*; очевидно, $P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx, \ \forall \ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ P\{\xi \in B\} = \int\limits_B p_\xi(x)dx$. Дифференцируя равенство, определяющее $p_\xi(x)$, по x, получим: $\dfrac{dF_\xi}{dx} = p_\xi(x)$; существование $\int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ означает, что $p_\xi = \dfrac{dF_\xi}{dx}$ имеет на $\mathbb{R}$ конечное число точек разрыва, $F_\xi \in C(\mathbb{R})$.

Примеры абсолютно непрерывных распределений:

1) *Равномерное* на $[a, b]$:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \ x \in [a, b] \\ 0, \ x \notin [a, b] \end{cases} \quad \Rightarrow F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ a \leq x \leq b \\ 1, \ x > b \end{cases}$$

(равномерное распределение на $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ описывает ошибку округления при измерении той или иной физической величины, если h – цена деления прибора).

2) *Показательное* с параметром λ:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases}$$

(описывает время безотказной работы прибора – см. замечание).

3) *Нормальное* с параметрами (a, σ): $p_\xi(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Нормальное распределение называется *стандартным*, если оно имеет параметры (0,1); в этом случае $F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x)$.

Замечание: для показательного распределения характерно *свойство отсутствия последействия*, то есть $\forall\ x, y > 0\quad P\{\xi \geq x + y / \xi \geq x\} = \dfrac{P\{\xi \geq x + y,\ \xi \geq x\}}{P\{\xi \geq x\}} = \dfrac{1 - P\{\xi < x + y\}}{1 - P\{\xi < x\}} = \dfrac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = P\{\xi \geq y\}$. Это означает, что вероятность работы прибора в течение времени t после того, как он уже проработал время t_0, равна вероятности безотказной работы в течение времени t.

Определение: пусть есть $n \geq 2$ случайных величин с функциями распределения $F_1(x), \ldots F_n(x)$. $F(x)$ называется *смесью распределений*, задаваемых $F_1, \ldots F_n$, если $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(x)$ $(\alpha_k \geq 0\ \forall\ k = \overline{1, n},\ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1)$.

Теорема 4 (Лебега, без доказательства): любая функция распределения $F(x)$ представима в виде смеси распределений, задаваемых $F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x)$, где F_1 – функция распределения дискретно распределённой случайной величины, F_2 – функция распределения случайной величины, распределённой абсолютно непрерывно, F_3 – *сингулярная функция распределения* (та, для которой нельзя задать плотность распределения).

3.2. Многомерные случайные величины.

Определение: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – вероятностное пространство; $\xi_1, \ldots \xi_n$: $\Omega \to \mathbb{R}$ – случайные величины $(n \geq 2)$; тогда $(\xi_1, \ldots \xi_n)$: $\Omega^n \to \mathbb{R}$ называется *случайным вектором*. $F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \ldots \xi_n < x_n\}$ – *многомерная совместная функция распределения* $\xi_1, \ldots \xi_n$ (функция распределения случайного вектора).

Теорема 1 (свойства многомерной функции распределения): $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ – случайный вектор; $F_{\xi_1, \ldots \xi_n}(x_1, \ldots x_n)$ – его функция распределения; тогда

1) $\forall\ x_{11},\ x_{12},\ x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : x_{11} < x_{12}\ F(x_{11}, x_2, \ldots x_n) \leq F(x_{12}, x_2, \ldots x_n)$.

2) $\forall\ k \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{x_k \to \infty} F(x_1, \ldots x_n) = 0,\ \lim\limits_{x_1, \ldots x_n \to \infty} F(x_1, \ldots x_n) = 1$.

3) $\forall\ x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R},\ \forall\ k \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{x_k \to x_{k0} - 0} F(x_1, \ldots x_n) = F(x_1, \ldots x_{k-1}, x_{k0}, x_{k+1}, \ldots x_n)$.

4) $\forall\ a_i, b_i \in \mathbb{R} : a_i < b_i (i = \overline{1, n})\ P\{a_1 \leq \xi_1 < b_1, \ldots a_n \leq \xi_n < b_n\} = F(b_1, \ldots b_n) - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i + \sum\limits_{i<j} p_{ij} - \ldots + (-1)^n F(a_1, \ldots a_n) \geq 0$, где p_{ij} – значение F в точке, для которой $i, j, \ldots$-ые координаты берутся как $a_i, a_j, \ldots$, а остальные как $b_l (l \neq i, j, \ldots)$. В частности, при $n = 2$ $P\{a_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$.

△ Свойства 1–3 следуют из соответствующих свойств для одномерной функции распределения (см. 3.1, теорема 2), а свойство 4 оставим без доказательства. ■

Определение: случайный вектор $\overrightarrow{\xi}$ распределён *дискретно*, если функция ξ: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ принимает конечное или счётное число значений $x_s = (x_{s1}, \ldots x_{sn})$; тогда $P\{\xi = x_s\} =$

$p_s \geq 0 \ \forall \ s, \ \sum\limits_s p_s = 1$. $\overrightarrow{\xi}$ распределён *абсолютно непрерывно*, если $\exists \ p_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots x_n)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\forall \ (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n \ p(x_1, \ldots x_n) \geq 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(x_1, \ldots x_n) dx_1 \ldots dx_n = 1$:

$$F_{\xi_1 \ldots \xi_n} = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(u_1, \ldots u_n) du_1 \ldots du_n;$$

таким образом, $p(x_1, \ldots x_n) = \dfrac{\partial^n F}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$.

Определение: если $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – случайный вектор, то $F_{\xi_1}(x)$, $F_{\xi_2}(y)$ называются *маргинальными* (одномерным) функциями распределения; аналогично, p_{ξ_1}, p_{ξ_2} – маргинальные плотности распределения. Очевидно, что

$$F_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1 \xi_2}(u, v) dv \right) du \Rightarrow \ p_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_{\xi_1 \xi_2}(x, v) dv.$$

Аналогично в n-мерном случае маргинальные плотности получаются интегрированием по $n-1$ переменным.

Примеры многомерных распределений:

1) *Равномерное двумерное* на области D: $p_{\xi_1 \xi_2}(x, y) = \begin{cases} 0, \ (x, y) \notin D \\ \frac{1}{S(D)}, \ (x, y) \in D. \end{cases}$

2) *Двумерное нормальное* с параметрами $(a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$:

$$p_{\xi_1 \xi_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} + \frac{2\rho(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} - \frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \right).$$

Можно показать, что в этом случае:

$$p_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{x(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right), \ p_{\xi_2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right).$$

Определение: случайные величины $\xi_1, \ldots \xi_n$ *независимы*, если

1) $F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$ во всех точках $(x_1, \ldots x_n)$, в которых эти функции определены.

2) $\forall \ B_1, \ldots B_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ P\{\xi_1 \in B_1, \ldots \xi_n \in B_n\} = P\{\xi_1 \in B_1\} \cdot \ldots \cdot P\{\xi_n \in B_n\}$.

Замечание: по теореме 1 (3.1) данные определения эквиваленты; отметим также, что на независимость случайных величин в совокупности накладываются менее жёсткие условия, чем на независимость в совокупности событий. Это связано с тем, что совместная функция распределения n случайных величин позволяет задать совместные функции распределения меньшего числа случайных величин, а также маргинальные функции распределения.

Теорема 2 (без доказательства): случайный вектор $(\xi_1, \ldots \xi_n)$ распределён дискретно; тогда для того, чтобы $\xi_1, \ldots \xi_n$ были независимы, необходимо и достаточно $P\{\xi_1 = x_1, \ldots \xi_n = x_n\} = P\{\xi_1 = x_1\} \cdot \ldots \cdot P\{\xi_n = x_n\} \ \forall \ (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Следствие: случайные величины, имеющие вырожденное распределение, независимы (равенство, заданное в условии теоремы, выполняется во всех точках $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3 (без доказательства): случайный вектор $(\xi_1, \ldots \xi_n)$ распределён абсолютно непрерывно; тогда для того, чтобы $\xi_1, \ldots \xi_n$ были независимы, необходимо и достаточно $p_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot p_{\xi_n}(x_n)$ во всех точках непрерывности этих плотностей.

3.3. Функции от случайных величин.

Определение: $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – *борелевская функция*, если $\forall\, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ $g^{-1}(B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, если ξ – случайный вектор, то $\eta = g(\xi)$ – также случайный вектор.

Распределение функции от случайной величины: пусть $\overrightarrow{\xi}$ – случайный вектор, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – борелевская функция, $\overrightarrow{\eta} = g(\overrightarrow{\xi})$; тогда $\forall\, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P\{\eta \in B\} = P\{\xi \in g^{-1}(B)\} = \int\limits_{g^{-1}(B)} p_\xi(x)dx = (\text{замена переменных в кратном интеграле}) =$$

$$= \int\limits_B p_\xi(g^{-1}(y))|J(g^{-1}(y))|^{-1}dy, \text{ где } J = \det\left\{\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right\}_{i,j=1}^n.$$

Пример (распределение χ^2 с одной степенью свободы): случайная величина ξ распределена нормально с парметрами (0,1); тогда $\eta = \xi^2$ имеет *распределение хи-квадрат* с одной степенью свободы. Найдём плотность распределения η.

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi^2 < y\} = P\{-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Phi_0(\sqrt{y}),$$

$$\text{где } \Phi_0(y) = \int\limits_0^y e^{-\frac{x^2}{2}}dx \Rightarrow p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}},\ y > 0 \\ 0,\ y \le 0. \end{cases}$$

Теорема 1 (без доказательства): пусть случайные величины $\xi_1^{(i)}, \dots \xi_{n_i}^{(i)}$ $(i = \overline{1,m})$ – независимые случайные величины; $\phi_i\colon \mathbb{R}^{n_i} \to R$ – борелевские функции; тогда случайные величины $\eta_i = \phi_i(\xi_1^{(1)}, \dots \xi_{n_i}^{(i)})$ также независимы.

Теорема 2 (формула композиции (свёртки)): ξ, η – независимые случайные величины; $\tau = \xi + \eta \Rightarrow p_\tau(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_\xi(u)p_\eta(z-u)du$.

$$\triangle\ F_\tau(z) = F_{\xi+\eta}(z) = \iint\limits_{u+v<z} p_{\xi\eta}(u,v)dudv = \int\limits_{-\infty}^{z-u} dv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(u,v)du = \begin{pmatrix} u = u \\ v = w - u \end{pmatrix} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{z}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(u, w-u)du\right)dw = \int\limits_{-\infty}^{z} p_\tau(w)dw \Rightarrow p_\tau(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(u, z-u)du =$$

$$= (\xi,\ \eta \text{ независимы}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u)p_\eta(z-u)du.\ \blacksquare$$

Следствие: ξ, η распределены нормально с параметрами (a_1, σ_1), (a_2, σ_2) соответственно; тогда случайная величина $\tau = \xi + \eta$ распределена нормально с параметрами $(a_1 + a_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

$$\triangle \text{ По формуле композиции } p_\tau(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)dx =$$

$$= \begin{pmatrix} u = z - a_1 - a_2 \\ v = x - a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{\sigma_1^2} + \frac{(u-v)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(v^2\cdot\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} - 2uv\cdot\frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{u^2}{\sigma_2^2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - \frac{u^2}{\sigma_2^2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} + \frac{u^2}{\sigma_2^2}\right)\right)dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{u\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} - v\cdot\frac{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}\right)^2 + \frac{u^2}{\sigma_2^2}\left(1-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\right)\right)dv =$$

$$= \left(t = v\cdot\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{u\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\ \cdot e^{-\frac{u^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}}\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\ e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot e^{-\frac{(z-a_1-a_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

– нормальное распределение с параметрами $(a_1+a_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$. ■

Пример: ξ, η – независимые случайные величины; ξ распределена нормально с параметрами $(0,\sigma)$, а η – равномерно на отрезке $[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}]$. Найдём $P_\tau(x)$, где $\tau = \xi+\eta$.

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, p_\eta(x) = \begin{cases}\frac{1}{h},\ x\in[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}]\\ 0,\ x\notin[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}].\end{cases} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_\tau(x) = \int\limits_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}h\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{h}\left(\Phi_0\left(\frac{x+\frac{h}{2}}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-\frac{h}{2}}{\sigma}\right)\right).$$

Замечание: независимые случайные величины могут быть связаны функционально; например, в случае вырожденного распределения ξ в точке $x=1$, $\eta=\xi^2$ имеет такое же распределение, а константы независимы (см. 3.2, следствие из теоремы 2).

Определение: $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1,\ldots\xi_n)$, $\overrightarrow{\eta} = (\eta_1,\ldots\eta_m)$ – случайные вектора; $D_\xi\subset\mathbb{R}^n$, $P\{\xi\in D_\xi\}>0$; тогда

$$F(y_1,\ldots y_m) = P\{\eta_1<y_1,\ldots\eta_m<y_m|\xi\in D_\xi\} = \frac{P\{\eta_1<y_1,\ldots\eta_m<y_m,\xi\in D_\xi\}}{P\{\xi\in D_\xi\}}$$

– *условная функция распределения* случайной величины η.

Если ξ и η распределены *дискретно*, то можно обозначить $P\{\xi=x_k,\eta=y_m\}=p_{km}$; тогда $P\{\xi=x_k\} = \sum\limits_m p_{km} = p_k \Rightarrow P\{\eta=y_m|\xi=x_k\} = \dfrac{p_{km}}{p_k}$ – вероятность для η при фиксированном ξ.

Если ξ и η распределены *абсолютно непрерывно*, то

$$P\{\eta<y|x\le\xi<x+h\} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{x}^{x+h}p_{\xi\eta}(u,v)dudv}{\int\limits_{x}^{x+h}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi\eta}(u,v)dv\right)du}\xrightarrow[h\to0]{}\frac{\int\limits_{-\infty}^{y}p_{\xi\eta}(x,v)dv}{p_\xi(x)} = P\{\eta<y|\xi=x\}$$

– *функция распределения η при фиксированном ξ.*

3.4. Числовые характеристики случайных величин.

Определение: ξ – случайная величина, распределённая дискретно $\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \dots \\ p_1 \dots p_n \dots \end{pmatrix}$, тогда $\mathbf{M}\xi = \sum\limits_k x_k p_k$ – *математическое ожидание* ξ (существует, если соответствующий ряд сходится абсолютно); если ξ – случайная величина, распределённая абсолютно непрерывно, то $\mathbf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x) dx$ (существует, если соответстующий несобственный интеграл сходится абсолютно). Если же ряд (интеграл) сходятся условно или расходятся, то математическое ожидание ξ не существует.

Определение: $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \dots \xi_n)$ – случайный вектор; $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – борелевская функция; $\eta = g(\xi)$. Если ξ распределена дискретно по векторам $x_1, \dots x_n, \dots$, то $\mathbf{M}\eta \stackrel{def}{=} \sum\limits_k g(x_k) p_k$; если ξ распределена абсолютно непрерывно, то $\mathbf{M}\eta \stackrel{def}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x_1, \dots x_n)| p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots x_n) \cdot$ $\cdot dx_1 \dots dx_n$ (для существования математического ожидания ξ ряд (интеграл) должны сходиться абсолютно).

Теорема 1 (свойства математического ождиания): $\xi,\ \eta$ – случайные величины, имеющие мат. ождиание; тогда

1) $\forall\ C \in \mathbb{R}\ \mathbf{M}(C\xi) = C \cdot \mathbf{M}\xi$;
2) $\forall\ C \in \mathbb{R}\ \mathbf{M}C = C$;
3) $\mathbf{M}\xi \le \mathbf{M}|\xi|$;
4) $\mathbf{M}(\xi + \eta) = \mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\eta$;
5) Если ξ и η независимы, то $\mathbf{M}(\xi\eta) = \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta$.

$\triangle$ Доказательства свойств 1-3 следуют из соответствующих свойств рядов и несобственных интегралов.

$$4)\ \mathbf{M}(\xi + \eta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x+y) p_{\xi\eta}(x,y) dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x p_{\xi\eta}(x,y) dxdy + \int\limits_{\mathbb{R}^2} y p_{\xi\eta}(x,y) dxdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} x \left(\int\limits_{\mathbb{R}} p_{\xi\eta}(x,y) dy \right) dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y \left(\int\limits_{\mathbb{R}} p_{\xi\eta}(x,y) dx \right) dy = \int\limits_{\mathbb{R}} x p_{\xi}(x) dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y p_{\eta}(y) dy = \mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\eta;$$

$$5)\ \mathbf{M}(\xi\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xy p_{\xi\eta}(x,y) dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}} x p_{\xi}(x) dx \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} y p_{\eta}(y) dy = \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta. \blacksquare$$

Замечание: если случайная величина η может быть представлена в виде $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ (где ξ_i независимы, одинаково распределены и называются *индикаторами*), то $\mathbf{M}\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}\xi_i$.

Примеры:

1) *Биномиальное распределение*: μ_n распределена биномиально с параметрами (n, p); тогда $\mu_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где ξ_i имеют распределение Бернулли с параметром p; тогда из замечания следует, что $\mathbf{M}\mu_n = np$.

2) *Геометрическое распределение*:

$$p_k = pq^k \Rightarrow \mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^k = pq \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = pq \left(\frac{q}{1-q} \right)' = \frac{q}{p}.$$

3) *Распределение Паскаля*: $\mu_n = \xi_1 + \ldots + \xi_{n+k}$, где индикаторы ξ_i имеют геометрическое распределение; тогда из замечания следует, что $\mathbf{M}\mu_n = \sum\limits_{i=1}^{n+k} \mathbf{M}\xi_i = \dfrac{q}{p}(n+k)$.

4) *Гипергеометрическое распределение*: $\mu_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где ξ_i принимает значение 1 при вытаскивании белого шара и значение 0 при вытаскивании чёрного. $\mathbf{M}\xi_i = \dfrac{M}{N}$; тогда $\mathbf{M}\mu_n = \dfrac{nM}{N}$.

5) *Распределение Пуассона*: $p_k = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \Rightarrow \mathbf{M}\xi = \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$.

6) *Равномерное расределение*: $\mathbf{M}\xi = \int\limits_a^b \dfrac{xdx}{b-a} = \dfrac{(b^2-a^2)}{2(b-a)} = \dfrac{a+b}{2}$.

7) *Нормальное распределение*:

$$\mathbf{M}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}} x \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) d(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 0 + a \cdot 1 = a.$$

8) *Показательное распределение*: $\mathbf{M}\xi = \int\limits_0^{+\infty} x\alpha e^{-\alpha x} dx = -xe^{-\alpha x}|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \dfrac{1}{\alpha}$.

9) *Распределение Коши*: $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow \mathbf{M}\xi = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{|x|dx}{1+x^2}$ – расходится, то есть математическое ожидание для распределения Коши не существует.

Определение: ξ – случайная величина, распределённая дискретно и имеющая математическое ожидание; тогда $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\left((\xi - \mathbf{M}\xi)^2\right)$ называется *дисперсией* ξ, а $\sqrt{\mathbf{D}\xi}$ – *средним квадратическим отклонением* ξ (определены только в том случае, когда существует $\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2$. Очевидно, что если ξ распределена дискретно, то $\mathbf{D}\xi = \sum\limits_k (x_k - \mathbf{M}\xi)^2 p_k$, а если ξ распределена абсолютно непрерывно, то $\mathbf{D}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} (x - \mathbf{M}\xi)^2 p_\xi(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}} x^2 p_\xi(x) dx - (\mathbf{M}\xi)^2$.

Теорема 2 (свойства дисперсии): ξ, η – случайные величины, имеющие дисперсию; тогда

1) $\mathbf{D}\xi \geq 0$;
2) $\forall\ C \in \mathbb{R}\ \mathbf{D}C = 0$;
3) $\forall\ C \in \mathbb{R}\ \mathbf{D}(C\xi) = C^2 \cdot \mathbf{D}\xi$;
4) $\mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + 2\mathbf{M}(\xi_1 - \mathbf{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathbf{M}\xi_2)$;

$\triangle$ Доказательства свойств 1-3 следуют из определения дисперсии, а также свойств числовых рядов и несобственных интегралов.

4) $\mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{M}(\xi_1 + \xi_2 - \mathbf{M}(\xi_1 + \xi_2))^2 = \mathbf{M}\left((\xi_1 - \mathbf{M}\xi_1) + (\xi_2 - \mathbf{M}\xi_2)\right)^2 = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + 2\mathbf{M}(\xi_1 - \mathbf{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathbf{M}\xi_2)$. Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $\mathbf{M}\left((\xi_1 - \mathbf{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathbf{M}\xi_2)\right) = (\mathbf{M}\xi_1 - \mathbf{M}\xi_1)(\mathbf{M}\xi_2 - \mathbf{M}\xi_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2$. ∎

Примеры:

1) *Биномиальное распределение*: $\mu_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, ξ_i имеют распределение Бернулли с параметром p; тогда $\mathbf{D}\xi_i = \mathbf{M}\xi_i^2 - (\mathbf{M}\xi_i)^2 = p - p^2 \Rightarrow \xi_i$ независимы $\mathbf{D}\mu_n = n(p - p^2) = npq$.

2) *Распределение Пуассона*: $\mathbf{M}\xi^2 - \mathbf{M}\xi = \mathbf{M}(\xi(\xi - 1)) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} m(m-1) \cdot \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \cdot \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda^2 \Rightarrow \mathbf{M}\xi^2 = \lambda 2 + \lambda \Rightarrow \mathbf{D}\xi = \lambda$.

3) *Гипергеометрическое распределение*: $\mu_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, ξ_i – случайная величина, принимающая значение 1 при извлечении белого шара и 0 при извлечении чёрного, то есть

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \frac{M}{N} \\ 0, & 1-\frac{M}{N}; \end{cases} \qquad \mathbf{M}\mu_n = n\frac{M}{N};\ \mathbf{M}\mu_n^2 = \mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\xi_k^2 + \sum_{k\neq l}\mathbf{M}\xi_k\xi_l = n\frac{M}{N}+$$

$$+n(n-1)\frac{M(M-1)}{N(N-1)};\ \mathbf{D}\mu_n = \mathbf{M}\mu_n^2 - (\mathbf{M}\mu_n)^2 = n\frac{M}{N} + n(n-1)\frac{M(M-1)}{N(N-1)} - n^2\frac{M^2}{N^2} =$$

$$= n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

4) *Равномерное распределение*:

$$\mathbf{D}\xi = \int\limits_a^b \frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{b-a}dx = \frac{b-a}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b = \frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5) *Нормальное распределение*: $\mathbf{D}\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{\mathbb{R}}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left(y = \dfrac{x-a}{\sigma}\right) = \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot$ $\int\limits_{\mathbb{R}} y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy = -\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(ye^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right) = \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = \sigma^2.$

Замечание: ξ – случайная величина, имеющая мат. ожидание и дисперсию; $\eta = \dfrac{\xi - \mathbf{M}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}$ $\Rightarrow \mathbf{M}\eta = \dfrac{\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}} = \dfrac{\mathbf{M}\xi - \mathbf{M}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}} = 0,\ \mathbf{D}\xi = \dfrac{\mathbf{D}(\xi-\mathbf{M}\xi)}{\mathbf{D}\xi} = \dfrac{\mathbf{D}\xi}{\mathbf{D}\xi} = 1$; таким образом получим η – *центрированную и нормированную* случайную величину.

Определение: ξ и η – случайные величины; тогда $\mathrm{cov}(\xi,\eta) \stackrel{def}{=} \mathbf{M}\left((\xi-\mathbf{M}\xi)(\eta-\mathbf{M}\eta)\right) = \mathbf{M}(\xi\eta) - \mathbf{M}\xi\cdot\mathbf{M}\eta$ – *коварация* случайных величин ξ и η.

Теорема 3 (свойства ковариации): ξ, η – случайные величины; тогда

1) $\mathrm{cov}(\xi,\xi) = \mathbf{D}\xi$;
2) $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathrm{cov}(\eta,\xi)$;
3) $\forall\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ \mathrm{cov}(C_1\xi, C_2\eta) = C_1C_2\,\mathrm{cov}(\xi,\eta)$;
4) ξ и η независимы; тогда $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$ (обратное неверно).

$\triangle$ Все свойства следуют из определения ковариации, дисперсии, математического ожидания и свойств мат. ожидания.

Теорема 4: $\xi_1,\ldots\xi_n$ – случайные величины; тогда $\forall\ c_1,\ldots c_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}c_i^2\mathbf{D}\xi_i + \sum_{i,j=1}^{n}c_ic_j\,\mathrm{cov}(\xi_i,\xi_j).$$

$\triangle$ Покажем, что равенство верно при $n=2$:

$$\mathbf{D}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = \mathbf{M}\left((c_1\xi_1 - c_1\mathbf{M}\xi_1)^2 + (c_2\xi_2 - c_2\mathbf{M}\xi_2)^2 - 2(c_1\xi_1 - c_1\mathbf{M}\xi_1)(c_2\xi_2 - c_2\mathbf{M}\xi_2)\right) =$$
$$= C_1^2\mathbf{D}\xi_1 + C_2^2\mathbf{D}\xi_2 - 2c_1c_2\,\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2);$$

далее можно по индукции перейти к общему утверждению. ■

Определение: ξ, η – случайные величины; тогда $\rho(\xi,\eta) \stackrel{def}{=} \dfrac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}}$ – *коэффициент корреляции* величин ξ и η.

Теорема 5 (свойства коэффициента корреляции): $\xi,\ \eta$ – случайные величины; тогда

1) $|\rho(\xi,\eta) \le 1|$;

2) Если ξ и η независимы, то $\rho(\xi,\eta)=0$;

3) $\forall\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ \eta = c_1\xi + c_2\ |\rho(\xi,\eta)| = 1$.

$\triangle$ 1) $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ \mathbf{D}(\lambda\xi+\eta) = \lambda^2\mathbf{D}\xi + 2\lambda\operatorname{cov}(\xi,\eta) + \mathbf{D}\eta \ge 0 \Rightarrow$ (рассматриваем как квадратный трёхчлен относительно λ) $\Rightarrow (\operatorname{cov}(\xi,\eta))^2 - \mathbf{D}\xi\cdot\mathbf{D}\eta < 0 \Rightarrow |\operatorname{cov}(\xi,\eta)| \le \sqrt{\mathbf{D}\xi\cdot\mathbf{D}\eta} \Rightarrow |\rho(\xi,\eta)| \le 1$.

2) Следует из свойства 4 теоремы 3.

3) Пусть $\mathbf{M}\xi = a,\ \mathbf{D}\xi = \sigma^2 \Rightarrow \mathbf{M}\eta = c_1a + c_2,\ \mathbf{D}\eta = c_1^2\sigma^2,\ \operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{M}(\xi - a)(c_1\xi + c_2 - c_1a - c_2) = c_1(x-a)^2 = c_1\sigma^2 \Rightarrow |\rho(\xi,\eta)| = \left|\dfrac{c_1\sigma^2}{\pm c_1\sigma^2}\right| = 1$. $\blacksquare$

Определение: случайные величины ξ и η называются некоррелированными, если $\rho(\xi,\eta)=0$, и коррелированными в обратном случае.

Замечание: двумерное нормальное распределение случайных величин ξ,η невырождено в случае $|\rho(\xi,\eta)| < 1$ и вырождено при $|\rho(\xi,\eta)| = 1$.

Определение: *смешанным моментом* порядка k называется $\mathbf{M}\xi^k$, *абсолютным моментом* порядка k: $\mathbf{M}|\xi|^k$. *Центральный момент* порядка k: $\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^k$, *абсолютный центральный момент* порядка k: $\mathbf{M}|\xi - \mathbf{M}\xi|^k$.

Замечание: если существует момент k-го порядка случайной величины ξ, то существуют и все моменты более низких порядков этой случайной величины.

3.5. Последовательности случайных величин.

Теорема 1 (неравенство Маркова): $\xi \ge 0$ – случайная величина, имеющая математическое ожидание и принимающая только положительные значения; $a \ge 0 \Rightarrow P\{\xi \ge a\} \le \dfrac{\mathbf{M}\xi}{a}$.

$\triangle$ Докажем теорему для двух случаев – абсолютно непрерывного и дискретного распределений ξ.

1) Абсолютно непрерывное распределение ξ: $p_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x<0 \\ \varphi(x),\ x \ge 0, \end{cases}\ \int\limits_0^{+\infty}\varphi(x)dx = 1 \Rightarrow$
$\forall\ a>0\ \mathbf{M}\xi = \int\limits_0^{+\infty} x\varphi(x)dx \ge \int\limits_a^{+\infty} x\varphi(x)dx \ge a\cdot\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx = a\cdot P\{\xi \ge a\} \Rightarrow P\{\xi\ge a\} \le \dfrac{\mathbf{M}\xi}{a}$.

2) Дискретное распределение ξ: пусть ξ принимает значения $x_1 < x_2 \dots x_k < \dots$; $\forall\ a > 0\ \exists\ k \in \mathbb{N}:\ x_k < a,\ x_{k+1} \ge a$. $\mathbf{M}\xi = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_ip_i \ge \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} x_ip_i \ge a\cdot\sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} p_i = a\cdot P\{\xi \ge a\} \Rightarrow P\{\xi \ge a\} \le \dfrac{\mathbf{M}\xi}{a}$. $\blacksquare$

Следствие (неравенство Чебышева): ξ – случайная величина, имеющая дисперсию; тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ P\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \ge \varepsilon\} \le \dfrac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}$.

$\triangle$ $P\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \ge \varepsilon\} = P\{|\xi - \mathbf{M}\xi|^2 \ge \varepsilon^2\} \le \dfrac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}$. $\blacksquare$

Определение: $\eta_1, \dots \eta_n, \dots$ – случайные величины; последовательность $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *сходится по вероятности* к случайной величине η ($\eta_n \xrightarrow{P} \eta,\ n \to \infty$), если $\forall\ \varepsilon > 0\ P\{|\eta_n - \eta| \ge \varepsilon\} \to 0,\ n \to \infty$ (то есть $P\{|\eta_n - \eta| < \varepsilon\} \to 1,\ n\to\infty$).

Определение: $\xi_1, \dots \xi_n, \dots$ – случайные величины, имеющие математическое ожидание; $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$; к последовательности $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ применим *закон больших чисел*, если $\forall\ \varepsilon > 0\ P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mathbf{M}\frac{S_n}{n}\right| \ge \varepsilon\right\} \to 0,\ n\to\infty$ (то есть $\left(\frac{S_n}{n} - \mathbf{M}\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty$).

Теорема 2 (Маркова): $\xi_1, \dots \xi_n, \dots$ – случайные величины, имеющие мат. ожидание и дисперсию. Тогда $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет закону больших чисел, если $\dfrac{S_n}{n^2} \to 0,\ n \to \infty$ (в случае попарной некоррелированности ξ достаточное условие примет вид $\dfrac{1}{n^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k \to 0$, $n \to \infty$).

$\triangle$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$: $\forall\ n \geq N$ $\left|\dfrac{\mathbf{D}S_n}{n^2}\right| < \varepsilon^3$, но, согласно неравенству Чебышева, $\forall\ n \geq N$ $P\left\{\left|\dfrac{S_n}{n} - \mathbf{M}\dfrac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{\mathbf{D}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} < \dfrac{\mathbf{D}S_n}{n^2\varepsilon^2} < \varepsilon \Rightarrow \left(\dfrac{S_n}{n} - \mathbf{M}\dfrac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty$. ■

Теорема 3 (Чебышева): $\xi_1, \dots \xi_n, \dots$ – попарно некоррелированные случайные величины, имеющие мат. ожидание и дисперсию; $\exists\ C \geq 0$: $\forall\ k \in \mathbb{N}$ $\mathbf{D}\xi_k \leq C$. Тогда последовательность $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет закону больших чисел.

$\triangle$ $\dfrac{1}{n^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k \leq \dfrac{nC}{n^2} = \dfrac{C}{n} \to 0,\ n \to \infty$, то есть последовательность $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет закону больших чисел по теореме Маркова. ■

Теорема 4 (Бернулли): случайные величины μ_n распределены биномиально с параметрами (n, p); тогда $\forall\ \varepsilon > 0$ $P\left\{\left|\dfrac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1,\ n \to \infty$.

$\triangle$ $\mu_n = \sum\limits_{i=1}^{n} xi_i,\ \xi_i = \begin{cases} 0,\ p \\ 1,\ q = 1 - p \end{cases}$ $\Rightarrow$ (по теореме Чебышева) $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет закону больших чисел $\Rightarrow \dfrac{\mu_n}{n} - \mathbf{M}\dfrac{\mu_n}{n} = \dfrac{\mu_n}{n} - p \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty \Rightarrow P\left\{\left|\dfrac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1$, $n \to \infty$. ■

Примеры:

1) Оценка вероятности успеха в схеме Бернулли: $P\{|\mu_n - np| \geq \varepsilon\} = \dfrac{\mathbf{D}\mu_n}{\varepsilon^2} = \dfrac{npq}{\varepsilon^2}$ ($\mathbf{M}\mu_n = np$ – см. 3.4).

2) Оценка доли брака по контрольной выборке: процесс описывается гипергеометрическим распределением (белые шары – бракованные изделия); пусть n – число изделий в контрольной выборке, N – объём партии изделий, M – число бракованных изделий во всей партии, ξ – число бракованных изделий в выборке. Тогда, согласно 3.4,

$$\mathbf{M}\left(\frac{\xi}{n}\right) = \frac{M}{N},\ \mathbf{D}\left(\frac{\xi}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} \Rightarrow \text{(неравенство Чебышева)}$$
$$\Rightarrow P\left\{\left|\frac{\xi}{n} - \frac{M}{N}\right| \geq \delta\right\} \leq \frac{1}{n\delta^2}\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Теорема 5 (Слуцкого – без доказательства): $g(\lambda_1, \dots \lambda_m) \in C^1(\mathbb{R}^m)$; $\xi_n^{(1)}, \dots \xi_n^{(m)}$ – случайные величины; $\forall\ i = \overline{1, m}$ $\xi_n^{(i)} \xrightarrow{P} C_i,\ n \to \infty$. Тогда $g(\xi_n^{(1)}, \dots \xi_n^{(m)}) \xrightarrow{P} g(C_1, \dots C_n)$.

Определение: $\xi_1, \dots \xi_n, \dots$ – случайные величины; $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *сходится в среднем* порядка $r \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$, если $\mathbf{M}((\xi_n - n)^r) \to 0,\ n \to \infty$ (в частности, при $r = 2$ реализуется сходимость в *среднем квадратичном*).

Определение: $F_1(x), \dots F_n(x), \dots$ – функции распределения случайных величин $\xi_1, \dots \xi_m, \dots$; $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *сходится по распределению* (*слабо сходится*: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi,\ n \to \infty$), если $\forall\ x \in \mathbb{R}$: $F \in C(x)$ $\exists \lim\limits_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$ – функция распределения ξ.

Определение: $\xi_1, \dots \xi_n, \dots$ – случайные величины; $\eta_n = \dfrac{\xi_n - A_n}{B_n}$; если $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$, где η имеет стандартное нормальное распределение ($F_{\eta_n}(x) \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x),\ n \to \infty$), то $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *асимптотически нормальна* с параметрами (A_n, B_n).

Теорема 6 (центральная предельная теорема – без доказательства): $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ – одинаково распределённые случайные величины, имеющие дисперсию $\mathbf{M}\xi_n = a$, $\mathbf{D}\xi_n = \sigma^2$; $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Тогда $P\left\{\dfrac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} \Phi(x)$ (то есть S_n асимптотически нормальна с параметрами $(na, \sigma\sqrt{n})$).

Следствие: μ_n распределена биномиально с параметрами (n, p); тогда $\mu_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где ξ_i – бернуллиевские случайные величины (индикаторы). Тогда $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ асимптотически нормальна с параметрами $(np, \sqrt{npq})$, то есть интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа является следствием центральной предельной теоремы.

Теорема 7 (Ляпунова – без доказательства): $\xi_1, \ldots \xi_n, \ldots$ – случайные величины, имеющие третий центральный момент; $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{M}\xi_k$, $B_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k$, $C_n^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{M}|\xi_k - \mathbf{M}\xi_k|^3$; $\dfrac{C_n}{B_n} \to 0$, $n \to \infty$; тогда $P\left\{\dfrac{S_n - \mathbf{M}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} < x\right\} \to \Phi(x)$, $n \to \infty$.

Теорема 8 (сходимости – без доказательства): $\xi_1, \ldots \xi_n, \ldots$; $\eta_1, \ldots \eta_n, \ldots$ – случайные величины; $F_{\xi_n} \to F$, $n \to \infty$; $\eta_n \xrightarrow{P} C$, $n \to \infty$. $J_n^{(1)} = \xi_n + \eta_n$, $J_n^{(2)} = \xi_n \eta_n$, $J_n^{(3)} = \dfrac{\xi_n}{\eta_n}$. Тогда $F_{J_n^{(1)}} \to F(x - C)$, $n \to \infty$; $F_{J_n^{(2)}} \to F(xC)$, $n \to \infty$; $F_{J_n^{(3)}} \to F\left(\dfrac{x}{C}\right)$, $n \to \infty$ (два последних соотношения верны только при $C > 0$).

4. Основы математической статистики.

4.1. Выборки и их числовые характеристики.

Определение: $x_1, \ldots x_n$ – одинаково распределённые независимые случайные величины; набор $(x_1, \ldots x_n)$ называется *выборкой* объёма n и обычно представляет собой результаты n одинаковых, независимых экспериментов. Элементы выборки могут быть переставлены в порядке возрастания, в результате чего получится *вариационный ряд* $(x^{(1)}, \ldots x^{(n)})$, $x^{(1)} \le x^{(2)} \le \ldots \le x^{(n)}$. $\widehat{F}_n(x) = \dfrac{\mu_n(x)}{n}$ называется *эмпирической функцией распределения*, где $\mu_n(x)$ – число элементов выборки, меньших x.

Теорема 1: $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon > 0\ \lim\limits_{n\to\infty} P\{|\widehat{F}_n(x) - F(x)| \ge \varepsilon\} = 0$, где $F(x)$ – функция распределения случайных величин x_i (то есть $\widehat{F}_n \xrightarrow{P} F,\ n \to \infty$) (в данном случае $\widehat{F}(x)$ и $F(x)$ рассматриваются как случаные величины).

$\triangle$ При фиксированном $x \in \mathbb{R}$ μ_n имеет биномиальное распределение с параметрами (n,p) $(p = P\{x_k < x\} = F(x))$, поэтому, по теореме Бернулли, $P\left\{\left|\dfrac{\mu_n}{n} - F(x)\right| < \varepsilon\right\} \to 1,\ n \to \infty \Rightarrow F_n \xrightarrow{P} F,\ n \to \infty.$ $\blacksquare$

Замечание: выбрав $\{z_i\}_{i=0}^{r+1} \in \overline{\mathbb{R}}$: $-\infty = z_0 < z_1 < \ldots < z_r < z_{r+1} = \infty$ и $\widehat{p}_k = \widehat{F}_n(z_{k+1}) - \widehat{F}_n(z_k)$, можно построить прямоугольники с основаниями на отрезках $[z_k, z_{k+1}]$ и высотой $\widehat{p}_k$; тогда получим *гистограмму распределения* результатов измерений случайной величины; сами прямоугольники задают *полигон частот*, граница которого приближённо описывает график $p(x)$ – плотности распределения измеряемой случайной величины.

Определение: числа $a_\nu = \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^\nu$ называются *выборочными моментами*, а $m_\nu = \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ – *центральными выборочными моментами* ($\bar{x} = a_1 = \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$). Моменты распределённой случайной величины ξ обозначаются как $\alpha_\nu = \mathbf{M}\xi^\nu,\ \mu_\nu = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^\nu$. Очевидно, что выборочные моменты также являются случайными величинами.

Пример: рассчитаем некоторые характеристики a_1 и m_2. $\mathbf{M}\bar{x} = \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{M}\xi = \alpha_1,\ \mathbf{D}\bar{x} = \dfrac{1}{n^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi = \dfrac{\mu_2}{n}$. Пусть $y_k = x_k - \mathbf{M}x_k$; тогда $m_2 = \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - \bar{y})^2 = \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 - \bar{y}^2$ ($\mathbf{M}\bar{x} = \mathbf{M}x_k \Rightarrow \mathbf{M}\bar{y} = \bar{x} - \mathbf{M}\bar{x}$; $\dfrac{2}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} y_k\bar{y} = \dfrac{1}{n} \cdot (\bar{x} - \mathbf{M}\bar{x}) \sum\limits_{k=1}^{n} y_k = 2\bar{y}^2$) $\Rightarrow \mathbf{M}m_2 = \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_2 - \mathbf{M}(\bar{x} - \mathbf{M}\bar{x})^2 = \mu_2 - \mathbf{D}\bar{x} = \mu_2 \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

Определение: $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение; тогда случайная величина $\xi_n^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ имеет *распределение хи-квадрат* с n степенями свободы, а $\tau_n = \dfrac{\xi_0\sqrt{n}}{\chi_n^2}$ – *распределение Стьюдента* с n степенями свободы.

Теорема 2 (Фишера – без доказательства): $x_1, \ldots x_n$ – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами (a, σ); тогда $\bar{x}$ и m_2 независимы, причём $\bar{x}$ имеет нормальное распределение с параметрами $(a, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$, а $\dfrac{nm_2}{\sigma^2}$ – распределение хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы.

Следствие: случайная величина $\dfrac{\bar{x} - a}{\sqrt{m_2}}\sqrt{n-1}$ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

$\triangle$ $\dfrac{\bar{x}-a}{\sqrt{m_2}}\sqrt{n-1} = \sqrt{n-1}\cdot\dfrac{\dfrac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\dfrac{\sqrt{nm_2}}{\sigma}}$, но, по теореме Фишера, $\dfrac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ имеет стандартное нормальное распределение, а $\left(\dfrac{\sqrt{nm_2}}{\sigma}\right)^2$ – распределение хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы. ■

4.2. Точечные и интервальные оценки.

Определение: *статистикой* называется любая функция выборки. *Точечная оценка* параметра θ – функция $\widehat{\theta}_n(x_1,\dots x_n)$, где $(x_1,\dots x_n)$ – выборка. Точечная оценка называется *несмещённой*, если $\mathbf{M}\widehat{\theta}_n=\theta$ и *состоятельной*, если $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta,\ n\to\infty$.

Определение: *интервальной оценкой* параметра θ называются функции $\underline{\theta}(x_1,\dots x_n)$ и $\overline{\theta}(x_1,\dots x_n)$: $\forall\ (x_1,\dots x_n)\ \underline{\theta}(x_1,\dots x_n)<\theta$. Если $P\{\underline{\theta}(x_1,\dots x_n)<\theta<\overline{\theta}(x_1,\dots x_n)\}=1-2\alpha$, то $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$ называется *доверительными интервалом* для θ, соответствующим доверительной вероятности $1-2\alpha$.

Способы получения оценок:

1. *Непосредственный подбор* (критерием правильности является близость a_ν и α_ν).

2. *По наибольшему правдоподобию*: введём *функцию правдоподобия* $L(x_1,\dots x_n,\theta) = p_{x_1}(x_1,\theta)\cdot\ldots\cdot p_{x_n}(x_n,\theta)$; оценка для θ выбирается так, чтобы значение функции L было максимальным, то есть из уравнения $\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=0$ (или $\dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta}=0$).

3. *С помощью критерия* χ^2: при оценке s параметров $(\theta_1,\dots\theta_s)$ распределение величины $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_k-np_k(\theta_1,\dots\theta_s)}{np_k(\theta_1,\dots\theta_s)}$ близко к χ^2_{n+s-1}; зная это, можно определить функции $p_k(\theta_1,\dots\theta_s)$ $(k=\overline{1,n})$, а с их помощью – точечные оценки для $\theta_1,\dots\theta_s$.

Доверительные интервалы для нормального распределения:

1. *Оценка a при известном σ*: по теореме Фишера $\dfrac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ имеет стандартное нормальное распределение, то есть $\exists\ u_\alpha>0$: $P\left\{\left|\dfrac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|<u_\alpha\right\}=1-2\alpha$, u_α определяется из уравнения $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{u_\alpha}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\alpha \Rightarrow P\left\{\bar{x}-u_\alpha\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+u_\alpha\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=1-2\alpha$, то есть $\left[\bar{x}-u_\alpha\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+u_\alpha\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ – доверительный интервал для a.

2. *Оценка для a при неизвестном σ*: согласно следствию из теоремы Фишера $\tau_{n-1}=\dfrac{\bar{x}-a}{\sqrt{m_2}}\sqrt{n-1}$ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы; значит, $\exists\ t_{\alpha,n-1}$: $=P\{|\tau_{n-1}|<t_{\alpha,n-1}\}=1-2\alpha$, поэтому $P\left\{\bar{x}-t_{\alpha,n-1}\cdot\sqrt{\dfrac{m_2}{n-1}}<a<\bar{x}+t_{\alpha,n-1}\cdot\sqrt{\dfrac{m_2}{n-1}}\right\}=1-2\alpha$.

3. *Оценка для σ при известном a*: $S^2=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-a)^2 \Rightarrow \dfrac{S^2}{\sigma^2}$ имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы. $\forall\ \alpha\in[0,\dfrac{1}{2}\ ]\ \exists\ \chi_{\alpha,n}$: $P\{\chi^2_n>\chi^2_{\alpha,n}\}=\alpha\Rightarrow$

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha,n}<\frac{S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha,n}\right\}=1-2\alpha\Rightarrow P\left\{\frac{S}{\chi_{\alpha,n}}<\sigma<\frac{S}{\chi_{1-\alpha,n}}\right\}=1-2\alpha.$$

4. *Оценка для σ при неизвестном a*: по теореме Фишера $\dfrac{nm_2}{\sigma^2}$ имеет распределение хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы, то есть $P\left\{\chi^2_{1-\alpha,n-1} < \dfrac{nm_2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha,n-1}\right\} = 1-2\alpha \Rightarrow$ $P\left\{\dfrac{\sqrt{nm_2}}{\chi_{\alpha,n-1}} < \sigma < \dfrac{\sqrt{nm_2}}{\chi_{1-\alpha,n-1}}\right\} = 1-2\alpha$.

5. *Сравнение выборок*: $(x_{11},\ldots x_{n1})$, $(x_{12},\ldots x_{n2})$ – независимые выборки; $\bar{x}_i = \dfrac{1}{n_i}\cdot \sum\limits_{k=1}^{n_i} x_{ki}$, $m_{2i} = \dfrac{1}{n_i}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n_i}(x_{ki}-\bar{x}_i)^2$ $(i=\overline{1,2})$; тогда, по теореме Фишера, $\chi^2_{n_1+n_2-2} = \dfrac{n_1m_{21}+n_2m_{22}}{\sigma^2}$ имеет распределение хи-квадрат с n_1+n_2-2 степенями свободы.

$$\tau_{n_1+n_2-2} = \frac{\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(a_1-a_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}}}}{\sqrt{\dfrac{n_1m_{21}+n_2m_{22}}{(n_1+n_2-2)\sigma^2}}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2-(a_1-a_2))\sqrt{n_1n_2(n_1+n_2-2)}}{\sqrt{(n_1m_{21}+n_2m_{22})(n_1+n_2)}} \Rightarrow$$

$$P\{\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{\alpha,n_1+n_2-2}\cdot\sqrt{\frac{(n_1m_{21}+n_2m_{22})(n_1+n_2)}{n_1n_2(n_1+n_2-2)}} < |a_1-a_2| <$$

$$< \bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{\alpha,n_1+n_2-2}\cdot\sqrt{\frac{(n_1m_{21}+n_2m_{22})(n_1+n_2)}{n_1n_2(n_1+n_2-2)}}\} = 1-2\alpha.$$

Определив доверительный интервал, можно сделать предположение о принадлежности двух выборок к одной и той же или разным генеральным совокупностям.

Замечание: если случайные величины $x_1,\ldots x_n$ распределены так, что имеют дисперсию ($\mathbf{M}x_k = a$, $\mathbf{D}x_k = \sigma^2$), то, согласно центральной предельной теореме, распределение $\dfrac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ близко к стандартному нормальному при больших n. Это позволяет оценивать a и σ с помощью полученных формул. Например, для биномиального распределения $P\left\{\dfrac{\mu_n}{n} - u_\alpha\cdot\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}} < p < \dfrac{\mu_n}{n} + u_\alpha\cdot\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right\} \to 1-2\alpha$, $n\to\infty$, где σ_n^2 – любая состоятельная оценка σ^2.

4.3. Статистическая проверка гипотез.

1. *С помощью интервальных оценок*: случайная величина ξ распределена нормально с параметрами (a,σ); гипотеза состоит в том, что $\mathbf{M}\xi = a_0$; из 4.2

$$P\left\{|\bar{x}-a_0| > t_{\alpha,n-1}\cdot\sqrt{\frac{m_2}{n-1}}\right\} = 2\alpha.$$

Если, согласно измерениям, $|\bar{x}-a_0| > t_{\alpha,n-1}\cdot\sqrt{\dfrac{m_2}{n-1}}$, то гипотеза отвергается; в этом случае вероятность отказа от верной гипотезы равна 2α.

2. *Критерий хи-квадрат*: гипотеза утверждает, что случайная величина x_k имеет функцию распределения $F(x)$. Выберем произвольные числа $z_1,\ldots x_r$: $z_1 < \ldots < z_r$. Если гипотеза верна, то $p_l = P\{x_k \in [z_l, z_{l+1})\} = F(z_{l+1}) - F(z_l)$. Пусть m_l – число результатов эксперимента, попавших в отрезок $[z_l, z_{l+1})$; в случае верного предположения $\mathbf{M}m_l = np_l$; мерой расхождения является $\eta_{n,r} = \sum\limits_{i=1}^{r+1}\dfrac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$, распределение которой близко к распределению хи-квадрат с r степенями свободы. Поэтому $P\{\eta_{n,r} < C\} \to P\{\chi^2_r < C\}$, $n\to\infty$, где C

определяется доверительной вероятностью, которая равна вероятности отказа от верной гипотезы.

3. *Критерий Колмогорова*:

Теорема 1 (Колмогорова – без доказательства):

$$P\left\{\sqrt{n}\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}|\widehat{F}_n(x)-F(x)|<z\right\}\to K(z),\ n\to\infty,\text{ где}$$

$$K(z)=\begin{cases}0,\ z\le 0\\ \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-2k^2z^2},\ z>0.\end{cases}$$

Теорема позволяет определить z_α: $1-K(z_\alpha)=\alpha$; тогда

$$P\left\{\widehat{F}_n(x)-\frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}<F(x)<\widehat{F}_n(x)+\frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\right\}\to 1-\alpha,\ n\to\infty.$$

Определение: *статистикой критерия* называется функция, значение которой определяет принятие гипотезы или отказ от неё (например, $\eta_{n,r}$ для критерия хи-квадрат). *Критической областью* называется область $\mathbb{R}^n$, в которой статистика критерия превышает величину, заданную доверительной вероятностью.

Определение: гипотеза H *проста*, если она однозначно определяет распределение выборки, и *сложна* в противном случае.

Определение: пусть $H_0,\ H_1$ – простые конкурирующие гипотезы; S – критическая область. *Ошибкой первого рода* $\alpha=P_0\{x\in S\}$ называется вероятность отвергнуть гипотезу H_0 в том, случае, когда она верна; *ошибкой второго рода* $\beta=P_1\{x\notin S\}$ называется вероятность принять гипотезу H_0 в том случае, когда она ложна. Число $1-\beta$ называют *мощностью критерия.*

Теорема 2 (критерий Неймана-Пирсона – без доказательства): пусть гипотезы H_0 и H_1 задают функции $p_0(\overrightarrow{x})$ и $p{+}1(\overrightarrow{x})$; $S_c=\{\overrightarrow{x}|p_1(\overrightarrow{x})\ge cp_0(\overrightarrow{x})\}$. Пусть $\forall\,\alpha\in[0;1]\ \exists\,c$: $P_0\{\overrightarrow{x}\in S_c\}=\alpha$; тогда наиболее мощным (при фиксированном α) является критерий, определяемый областью S_c.

4.4. Метод наименьших квадратов.

Пусть задан набор результатов измерений (точек) $(x_1,y_1),\dots(x_n,y_n)$, который требуется аппроксимировать (приблизить) линейной функцией $y=ax+b$, причём $\forall\ i=\overline{1,n}\ y_i=ax_i+b+\delta_i$, где δ_i независимы и распределены нормально с параметрами $(0,\sigma)$. Воспользуемся критерием правдоподобия: $L(y,a,b,\sigma^2)=\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\cdot\exp\left(-\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b_i)^2\right)$. Тогда

$$\frac{\partial\ln L}{\partial a}=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-ax_i-b)=0,$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial b}=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0,$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial(\sigma^2)}=-\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2=0.$$

Выберем x_i: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$; в этом случае

$$a^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2},\ b^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i,\ \sigma^{*^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a^* x_i - b^*)^2.$$

Подставляя $y_i = a x_i + b + \delta_i$, получим

$$a^* = a + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \delta_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2},\ b^* = b + \frac{1}{n} \cdot \sum_{n}^{i=1} \delta_i \Rightarrow \mathbf{M} a^* = a,\ \mathbf{M} b^* = b,$$

то есть полученные оценки являются несмещёнными.

Тот же результат может быть получен при минимизации функции $Q(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2$, поэтому такой метод аппроксимации называют *методом наименьших квадратов*.

Предметный указатель